

Έστω ότι δεν είναι. Τότε υπάρχει $\mu, \dots, \mu_j \in \mathbb{F}$ οχ, όλα μηδέν
 $\mu \in \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{j-1} v_{j-1} + \mu_j v_j = 0_{V_j} (*)$

Από επαγωγή υπόθεσης $\Rightarrow \mu_j \neq 0_{\mathbb{F}}$

Α στην (*) δίνει $\mu A v_1 + \dots + \mu_{j-1} A v_{j-1} + \mu_j A v_j = \lambda 0_{V_j} = 0_{V_j}$
 $\Rightarrow \mu_1 v_1 + \dots + \mu_j \lambda_j v_j = 0_{V_j} (**)$

Πολλαπλ την (*) με $-\lambda_j$ και προσθέτουμε στην (**)

Έχουμε $\mu_1(\lambda_1 - \lambda_j) v_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_j) v_2 + \dots + \mu_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j) v_{j-1} = 0$

Αφού $\lambda_j \neq \lambda_i$ για $i < j$ και αφού $v_1, \dots, v_{j-1}$ γραμμ ανεξ από την
 επαγωγική υπόθεση $\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{j-1} = 0_{\mathbb{F}}$. Αφού η (*) δίνει $\mu_j v_j = 0_{V_j}$
 $\Rightarrow v_j = 0_{V_j}$ αντίφαση, κάθε ιδιοδιάνυσμα είναι μη μηδενικό.

16/03/2017

ΥΠΕΝΘ. $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ, αν υπάρχουν αντίστροφμοι
 $P \in \mathbb{F}^{n \times n}, Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ώστε $B = PAQ$

ΠΡΟΤΑΣΗ $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ισοδύναμοι αν και μόνο αν $\text{ραθμίδα}(A) = \text{ραθμίδα}(B)$
 Αλγόριθμος (Ευκλιδους) Αν $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ $d = \text{ραθμίδα}(A)$ Υπολογίζει $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$,
 $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντίστρ. ώστε $PAQ = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ΥΠΕΝΘ. 1) Έστω $T: V \rightarrow W$ γραμμ. e, e' βάσεις του V , g, g' βάσεις του
 W . Τότε οι πίνακες $[T]_{e'}^g$ και $[T]_e^{g'}$ είναι ισοδύναμοι.

2) Έστω $T: V \rightarrow W$ γραμμ. e βάση του V , g βάση του W . $A = [T]_e^g$
 Αν B πίνακας ισοδύναμος με τον A τότε υπάρχει βάση e' του V
 και g' του W ώστε $B = [T]_{e'}^{g'}$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ #1 Ισοδυναμία Πινάκων

Ασκ. 1 γραμμ. απεικόνιση
 $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ με $T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} b+c & a \\ b & c \end{pmatrix}$

ΒΗΜΑ 1^ο Έστω $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 = x^2)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ και $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^{2 \times 2}$,
 $\tilde{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{g}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Θέτουμε $A = [T]_{\tilde{e}}^{\tilde{g}} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$. Έχουμε $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{rank}(A) = 3$. Άρα από Αλγόρ.

υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ αντιστρέψιμοι ώστε

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\tilde{e}}^{\tilde{g}} = [id_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}]_{\tilde{g}}^{\tilde{g}} [T]_{\tilde{e}}^{\tilde{g}} [id_{\mathbb{R}_2[x]}]_{\tilde{e}}^{\tilde{e}}$$

Άρα αρκεί $P = [id_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}]_{\tilde{g}}^{\tilde{g}}, Q = [id_{\mathbb{R}_2[x]}]_{\tilde{e}}^{\tilde{e}} \Rightarrow$

$$Q^{-1} = [id_{\mathbb{R}_2[x]}]_{\tilde{e}}^{\tilde{e}}$$

ΓΕΝΙΚΑ

Έστω $\tilde{e}$ γνήσια βάση του V , $P \in \mathbb{F}^{v \times v}$ αντιστ. όπου $v = \dim_{\mathbb{F}} V$.
Βρείτε βάση e ώστε $P = [id_V]_e^{\tilde{e}}$

ΛΥΣΗ Έστω $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_v)$ η βάση

Έστω $P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1v} \\ p_{21} & \dots & p_{2v} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{v1} & \dots & p_{vv} \end{bmatrix}$

Θέτουμε $e_i = p_{1i}\tilde{e}_1 + p_{2i}\tilde{e}_2 + \dots + p_{vi}\tilde{e}_v$
Τότε $e = (e_1, e_2, \dots, e_v)$ βάση του V
και $[id_V]_e^{\tilde{e}} = P$

Ασκ 3 Έστω $\mathbb{F}$ το σώμα

AB αντιστ. $\Rightarrow \det(AB) \neq 0 \Rightarrow$

$(\det A)(\det B) \neq 0 \Rightarrow$ $\det A \neq 0$ και $\det B \neq 0 \Rightarrow$
 $\mathbb{F}$ σώμα

A αντιστ. και B αντιστ.

Ασκ 4 Αφού A, B ομοιοί, υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστ. ώστε
 $B = P^{-1}AP$

Θα δείξουμε με επαγωγή στο $k \geq 1$ ότι $B^k = P^{-1}A^kP$

Αρα B^k, A^k ομοιοί

Απόδ με επαγωγή για $k=1$ (υποθέτουμε) Υποθέτουμε $k \geq 2$ και ότι
 ισχύει για $k-1$ δηλ $B^{k-1} = P^{-1}A^{k-1}P$. Τότε $B^k = B^{k-1}B = (P^{-1}A^{k-1}P)(P^{-1}AP)$
 $= P^{-1}A^{k-1}(PP^{-1})AP = P^{-1}A^{k-1}I_n AP = P^{-1}A^{k-1}AP = P^{-1}A^kP$

Ασκ 5.

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, τότε $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{αθροισμα}$
 των στοιχείων της διαγωνίου του A .

α) $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

$\text{tr}(\lambda A) = \text{tr}(A) \cdot \lambda$

Απόδ Έστω $B = (b_{ij})$ Τότε ο $A+B$ έχει (i,j) στοιχείο το
 $a_{ij} + b_{ij}$ Αρα $\text{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

Ο λA έχει (i,j) στοιχείο λa_{ij} , άρα

$\text{Tr}(\lambda A) = \lambda a_{11} + \lambda a_{22} + \dots + \lambda a_{nn} = \lambda(a_{11} + \dots + a_{nn}) = \lambda \text{Tr}(A)$

β) Θ.Τ.ο $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\text{Tr}(A) = 2$ ισχύει και (αθροισμα διαγωνίου)

$A^2 = I_2$ $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(I_2) = 2$

Έστω $C = AB = (c_{ij})$. Τότε $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

$D = BA = (d_{ij})$ $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$

Αρα $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^n d_{kk} = \text{Tr}$

γ) Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος με $B = P^{-1}AP$
 Έχουμε $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1}(AP)) = \text{Tr}(AP)P^{-1}) = \text{Tr}(A(P^{-1}P)) = \text{Tr}(A)$

ΠΟΡΙΣΜΑ Αν $f: V \rightarrow V$ γραμμ. ενδομορφισμός και
 e, g δύο βάσεις του V , τότε $\text{Tr}([f]_e^e) = \text{Tr}([f]_g^g)$

Αποδ Αφού οι πίνακες $[f]_e^e, [f]_g^g$ είναι όμοιοι και
 όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ιχνός, το αποτέλεσμα
 έπεται

Άρα ορίζουμε $\text{Tr}(f) = \text{Tr}([f]_e^e)$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ Αν $\mathbb{F}$ σώμα $V \neq 0$ δ.χ. επί του $\mathbb{F}$ πενηρ. διάστασης
 και $f: V \rightarrow V$ γραμμ. ενδομορφισμός έχουμε ορίσει βαθμίδα(f)
 $\det(f), \text{Tr}(f), \chi_f(x) \in \mathbb{F}[x]$

Πώς; $\left\{ \begin{array}{l} \text{Έστω } e \text{ βάση του } V, \text{ τότε ισχύουν} \\ \text{βαθμίδα}(f) = \dim \text{Im } f = \text{βαθμίδα}([f]_e^e) \\ \det(f) = \det([f]_e^e) \\ \text{Tr}(f) = \text{Tr}([f]_e^e), \chi_f(x) = \chi_{[f]_e^e}(x) \end{array} \right.$

Προσοχή για $\det(f), \text{Tr}(f), \chi_f(x)$ πρέπει αναγκαστικά η
 γραμμ. απεικόνιση f να αρχίζει και να καταλήγει στον ίδιο
 δ.χ., (πρέπει να έχουν ίδια βάση πάνω και κάτω)

Ασκ 7.

Έστω $e = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

Τότε
$$[\phi]_e^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Άρα $\text{βαθμίδα}(f) = \text{βαθμίδα}([\phi]_e^e) = 3$

$$\det(\phi) = \det([\phi]_e^e) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Tr}(\phi) = \text{Tr}([\phi]_{\mathcal{E}}) = \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0+0+0=0$$

$$X_{\lambda}(\phi) = X[\phi]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = \dots$$

Ασκ 8 (Για $v=2$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$T: \mathbb{F}^{2 \times 1} \rightarrow \mathbb{F}^{2 \times 1}$$

Η T γραμμική, γιατί $T(b+b') = A(b+b') = Ab + Ab'$

$$T(\lambda b) = A(\lambda b) = \lambda Ab$$

Έστω $\mathcal{e} = (e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ η κανονική βάση του $\mathbb{F}^{2 \times 1}$

$$T(e_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11} e_1 + a_{21} e_2$$

$$T(e_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

$$\text{Άρα } [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

Συμπερασμα βαθμίδα $(T) = \text{βαθμίδα}(A)$

$$\det T = \det A \quad \text{Tr}(T) = \text{Tr}(A) \quad X_{T(X)} = XA(X)$$

Ασκ 9

$$V \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \phi = \psi/V$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } \psi((x,y,z) + (x',y',z')) &= \psi((x+x', y+y', z+z')) = \\ &= (x+x', 4(y+y') + 6(z+z')) = (x, 4y+6z) + (x', 4y'+6z') = \psi(x,y,z) + \psi(x',y',z') \end{aligned}$$

Όμοιος $\psi(\lambda(x,y,z)) = \lambda\psi(x,y,z)$ Άρα ψ γραμμική. Άρα η ϕ περιορίζεται γραμμικός δε υποχώρο, έπεται ϕ γραμμική.

βαθμίδα ψ Έστω $\mathcal{e} = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ η κανονική

βάση του $\mathbb{R}^3$ και $\mathcal{g} = (g_1 = (1,0), g_2 = (0,1))$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$

$$\text{Έχουμε } \text{βαθμίδα}(\psi) = \text{βαθμίδα}([\psi]_{\mathcal{g}}^{\mathcal{e}}) = \text{βαθμίδα}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}\right) = \text{βαθμίδα}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 2$$

$$V = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+2b+3c=0 \} = \{ (-2b-3c, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ b(-2, 1, 0) + c(-3, 0, 1) \mid b, c \in \mathbb{R} \} = \langle (-2, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle$$

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ έχει βαθμίδα 2 γιατί $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

Άρα ο V έχει βάση $h = (h_1 = (-2, 1, 0), h_2 = (-3, 0, 1))$

Άρα $\text{βαθμίδα}(\phi) = \text{βαθμίδα}([\phi]_h^h) = \text{βαθμίδα}\left(\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$

Παρακάτω



ΦΥΛΛΑΔΙΟ #2 Ιδιότητες

Ασκ 1. $3x^5 + 2x^4 - 7x + 2 \overset{A}{\div} x^2 + x + 2 \overset{B}{\div}$

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 7x + 2 \quad | \quad x^2 + x + 2 \\ \underline{-3x^5 - 3x^4 - 6x^3} \quad | \quad 3x^3 - x^2 - 5x + 7 \\ -x^4 - 6x^3 + 0x^2 - 7x + 2 \quad | \quad \text{? υπόλοιπο} \\ \underline{x^4 + x^3 + 2x^2} \quad | \quad \\ -5x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \quad | \quad \\ \underline{5x^3 + 5x^2 + 10x} \quad | \quad \\ 7x^2 + 3x + 2 \quad | \quad \\ \underline{-7x^2 - 7x - 4} \quad | \quad \\ -4x - 12 \leftarrow \text{υπόλοιπο} \end{array}$$

Άρα $A = (\text{Πολυνομο}) B + (\text{υπόλοιπο})$

Ασκ 2. $x^3 - x^2 + 2x - 2$

Αναζητούμε πρώτη ρίζα $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$

Ξεραφίμε τότε $p|2$ και $q|1$. Υποψήφιες πρώτες ρίζες $2, -2, 1, -1$

Με δοκιμή 1 ρίζα

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 + 2x - 2 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \quad | \quad x^2 + 2 \\ 2x - 2 \quad | \quad \\ \underline{-2x + 2} \quad | \quad \\ 0 \end{array}$$

Αρα $p(x) = (x-1)(x^2+2) = (x-1)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})$

Q	ρίζα	πολλαπλότητα
	1	1

IR	ρίζα	πολλαπλότητα
	1	1

C	ρίζα	πολλαπλότητα
	1	1
	$i\sqrt{2}$	1
	$-i\sqrt{2}$	1

$g(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$

Αναζητούμε ρητή ρίζα $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ $q \geq 1$

Πρέπει $p|8$ και $q|1$

Υποψήφιες ρίζες $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

Με δοκιμή 1 ρίζα. Αρα $(x-1)$ διαιρεί το $g(x)$

Μετά την διαίρεση $g(x) = h(x)(x-1)$ όπου $h(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Πιθανές ρητές ρίζες $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{R}$ $q \geq 1$ του $h(x)$ ~~είναι~~ $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

Το 2 ρίζα του $h(x)$. Αρα το $(x-2)$ διαιρεί το $h(x)$ και μετά την διαίρεση $h(x) = (x^3 - 4x + 4)(x-2) = (x-2)^2(x-2) = (x-2)^3$

Αρα $g(x) = (x-1)(x-2)^3$

Στο Q ή το R ή το C	Ρίζες	πολλαπλότητα
	1	1
	2	3

Ασκ 7 Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Δείξτε ότι οι AB και BA έχουν ίδιες ιδιοτιμές

ΠΡΟΣΟΧΗ Οι γεωμετρικές πολλαπλότητες μπορεί να διαφέρουν

πχ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\chi(AB) = x^2$

$\chi(BA) = x^2$ Για τον ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
AB 0

ΑΛΓΕΒΡ ΠΟΛΥΠΛ 2

ΓΕΩΜ ΠΟΜ 1

Αρα
ΑΒ ΟΧΙ
ΔΙΑΓΕΝ

	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	ΑΝΓ. ΠΟΛΛ.	ΓΕΟΜ. ΠΟΛΛ.
Για τον BA	0	2	2

Άρα $BA = 0_{2 \times 2}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΙΜΟΣ

Συνεπώς AB και BA όχι ομοιοί

Πράγματι $P^{-1}(BA)P = P^{-1}0_{2 \times 2}P = 0$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Αν $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και A αντιστ. ή B αντιστ. τότε AB, BA ομοιοί

Υπόθ A αντιστ.

$BA = A^{-1}(AB)A$ άρα AB, BA ομοιοί

Ομοίως αν B αντιστ.

$$BA = B(AB)B^{-1}$$



20/03/2017

Θεώρημα [Caley - Hamilton]

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ έστω $p(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$

Υπενθ $p(A) = b_0 I_n + b_1 A + b_2 A^2 + \dots + b_n A^n \in \mathbb{F}^{n \times n}$

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη) Έστω $\mathbb{F}$ σώμα, $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\chi_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Τότε $\chi_A(A) = 0_{n \times n}$

→ Με άλλα λόγια κάθε τετραγωνικός πίνακας ικανοποιεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 2$$

$$A^2 - 5A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$